Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
Факультет математики і інформатики
Кафедра прикладної математики

Кваліфікаційна робота

освітньо-кваліфікаційний рівень: **бакалавр**

на тему

«Неявні лінійні різницеві рівняння з випадковою правою частиною»

Виконав: студент групи МП41 IV курсу
(перший бакалаврський рівень)
спеціальності 113
«Прикладна математика»
освітньої програми
«Прикладна математика»
Чахмахчян Д.М.
Керівник: кандидат фіз.-мат. наук ,
доцент кафедри
прикладної математики
Півень О.Л.
Рецензент: кандидат фіз.-мат. наук,
доцент, доцент кафедри
фундаментальної математики
Гефтер С.Л.

Харків – 2024 рік

Анотації

Чахмахчян Д.М. Неявні лінійні різницеві рівняння з випадковою правою частиною.

Нехай a, b, c – цілі числа, а $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ – послідовність незалежних, однаково розподілених цілозначних випадкових величин, які визначені на повному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Для кожного $\omega \in \Omega$ розглядається неявне неповне лінійне різницеве рівняння $bx_{n+m} + ax_n = f_n(\omega),\ n \in \mathbb{N}_0$ порядку m. Доведено, що якщо a не ділиться на b, і випадкові величини $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ мають невироджений розподіл, то ймовірність існування розв’язку в цілих числах цього рівняння дорівнює нулю. Також знайдено умови, за яких ймовірність того, що неявне лінійне різницеве рівняння другого порядку

$$cx_{n+2} + bx_{n+1} + ax_n = f_n(\omega),\ \ n \in \mathbb{N}_0$$

має розв’язок в цілих числах, дорівнює нулю.

Chakhmakhchian D.M. Implicit Linear Difference Equations with Random Right-Hand Side.

Let a, b, c be integers, and let $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ be a sequence of independent, identically distributed integer-valued random variables which are defined on a complete probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. For each $\omega \in \Omega$, consider the implicit incomplete linear difference equation $bx_{n+m} + ax_n = f_n(\omega),\ n \in \mathbb{N}_0$ of order m. It has been proven that if a is not divisible by b, and the random variables $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ have a non-degenerate distribution, then the probability of the existence of an integer solution to this equation is zero. Conditions have also been found under which the probability that the implicit linear difference equation of the second order

$$cx_{n+2} + bx_{n+1} + ax_n = f_n(\omega),\ \ n \in \mathbb{N}_0$$

has an integer solution is zero.

Зміст

Вступ

Останніми роками харківськими математиками активно проводяться дослідження неявних лінійних різницевих рівнянь з коефіцієнтами з різних комутативних кілець (див. [1]) . На даний момент більш детально вивчено неявне рівняння першого порядку над кільцем цілих чисел [2–3]. Неявні лінійні різницеві рівняння другого та більш високого порядку над кільцем цілих чисел досліджувались в [3–5] . Як показали ці дослідження, на відміну від явного рівняння для неявного рівняння має місце єдиність розв’язку.

Нехай a та b – цілі числа, $\mathbb{N}_0$ – множина невід'ємних цілих чисел, $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ – задана послідовність цілих чисел. Розглянемо задачу розв’язання в цілих числах наступного різницевого рівняння першого порядку:

$$bx_{n+1} + ax_n = f_n, \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{1}$$

Якщо $b = \pm 1$, то очевидно, що це рівняння має нескінченну кількість розв'язків в цілих числах. Якщо $b \neq 0, \pm 1$, то рівняння (1) називається *неявним* над кільцем $\mathbb{Z}$ (див. [1–3,6]).

Варто зауважити, що неявне рівняння (1) може не мати цілочисельних розв'язків. Наприклад, загальний розв'язок рівняння $3x_{n+1} = x_n + 1$ над $\mathbb{Q}$ має вигляд $x_n = \frac{c}{3^n} + \frac{1}{2}$, де $c \in \mathbb{Q}$, n = 0,1,2,.... Очевидно, що для будь-якого значення сталої c ми не можемо отримати цілочисельний розв'язок (див. Приклад 2.1 в [2]). В [2] доведено, що якщо a та b є взаємно простими числами, то рівняння (1) має не більше, ніж один розв'язок в цілих числах.

В [3] цей результат встановлено при більш слабкому припущенні: a не ділиться на b. За таких умов відображення, яке ставить у відповідність будь-якій послідовності цілих чисел $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ послідовність $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, де $f_n = bx_{n+1} + ax_n$, є ін'єктивним.

Тепер нехай $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ – послідовність незалежних, однаково розподілених цілозначних випадкових величин, які визначені на повному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. В [6] досліджувалось неявне лінійне різницеве рівняння першого порядку з випадковою правою частиною, тобто для кожного $\omega \in \Omega$, розглядалось рівняння:

$$bx_{n+1} + ax_n = f_n(\omega), \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{2}$$

Результати роботи [6] показують, що в багатьох випадках ймовірність того, що рівняння (2) має розв'язок в цілих числах, дорівнює нулю. В даній кваліфікаційній роботі результати роботи [6] переносяться на випадок так званого *неповного* рівняння порядку m:

$$bx_{n+m} + ax_n = f_n(\omega), \quad n \in \mathbb{N}_0$$

(див. Розділ 2, Теорема 2.1) і лінійного різницевого рівняння другого порядку

$$cx_{n+2} + bx_{n+1} + ax_n = f_n(\omega), \ n \in \mathbb{N}_0$$

(див. Розділ 3, Теореми 3.1 та 3.2), де $c \in \mathbb{Z}, c \neq 0, \pm 1$. Попередній розділ 1 носить оглядовий характер. В підрозділі 1.1 цього розділу наводиться приклад побудови послідовності незалежних однаково розподілених випадкових величин за допомоги теореми А.М. Колмогорова про побудову ймовірності на множинах послідовностей [7] у зв'язку з тим, що це обмеження є основним на праві частини $f_n(\omega)$ розглянутих рівнянь. Підрозділ 1.2 містить огляду результати робіт [2–4] щодо єдиності розв'язку неявних лінійних різницевих рівнянь першого та другого порядку з невипадковою неоднорідністю. Підрозділ 1.3 містить огляд результатів роботи [6] щодо рівняння (2).

Основні результати кваліфікаційної роботи було оголошено на XVIII Міжнародній науково-практичній конференції "Сучасні проблеми математики та її застосування у природничих науках та інформаційних технологіях" (2024 р.).

1. Огляд відомих результатів

1.1 Приклад ймовірнісного простору на якому існує послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин

Приклад побудови ймовірнісного простору, на якому можна задати послідовність $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ незалежних однаково розподілених випадкових величин із заданою функцію розподілу $F(x)$.

Приклад 1.1.

Нехай $F(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - функція розподілу [7], тобто вона задовольняє властивості

1. $F(x)$ неперервна зліва
2. $F(x)$ неспадна
3. $F(+\infty) = 1,\ F(-\infty) = 0.$

За функцією $F(x)$ означимо функції

$$F_n(a_1, \dots, a_n) = \prod_{i=1}^{n} F(a_i) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

Нехай $\Omega = \mathbb{R}^{\infty}$- множина всіх послідовностей дійсних чисел.

Борельовою сигма-алгеброю $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^{\infty})$ підмножин простору $\mathbb{R}^{\infty}$ [7] називається сигма-алгебра, що породжена множинами вигляду

$D_{n,a} = \left\{\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\infty}: x_n < a\right\},\ a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$

Тобто

$$\mathfrak{B}(\mathbb{R}^{\infty}) \equiv \sigma\left[D_{n,a}: a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\ \right]$$

За означенням борельовими є також скінченні перетини:

$$\bigcap_{k=1}^{n}\{x \in \mathbb{R}^{\infty}: x_k < a_k\} = \bigcap_{k=1}^{n} D_{k,a_k} = \left\{x \in \mathbb{R}^{\infty}: (x_1, \dots, x_n)^T \in \Pi_{a,n}\right\} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{\infty}),$$

$$\text{де} \quad \Pi_{a,n} = (-\infty, a_1) \times \dots \times (-\infty, a_n), \qquad \forall\ (a_1, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

Покладемо $\mathcal{F} = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{\infty})$. За теоремою Колмогорова [7, п.2.1.2] існує ймовірнісна міра P на $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^{\infty})$ така, що

$$P\left(\left\{x_j\right\}_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\infty}: x_1 < a_1, \dots, x_n < a_n\right) = P\left(\left\{x_j\right\}_{j=1}^{\infty} \in \Pi_{a,n}\right) =$$

$$= F_n(a_1, \dots, a_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Визначимо на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ випадкові величини $\xi_n: \Omega \to \mathbb{R}$ наступною формулою:

$$\xi_n\left\{\left\{x_j\right\}_{j=1}^{\infty}\right\} = x_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Покажемо, що $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин.

З (1.1) та (1.2) випливає:

$$P(\omega \in \Omega: \xi_1(\omega) < a_1, \dots, \xi_m(\omega) < a_m) =$$

$$= P\left(\left\{x_j\right\}_{j=1}^{\infty} \in \Omega: \xi_1\left(\left\{x_j\right\}_{j=1}^{\infty}\right) < a_1, \dots, \xi_m\left(\left\{x_j\right\}_{j=1}^{\infty}\right) < a_m\right) =$$

$$= P\left(\left\{x_j\right\}_{j=1}^{\infty} \in \Omega: x_1 < a_1, \dots, x_m < a_m\right) =$$

$$= F_m(a_1, \dots, a_m) = \prod_{i=1}^{m} F(a_i), \quad \forall m \in \mathbb{N}, \ \forall a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}.$$

Таким чином,

$$\forall m \in \mathbb{N}, \ \forall a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$$

$$P(\omega \in \Omega: \xi_1(\omega) < a_1, \dots, \xi_m(\omega) < a_m) = \prod_{i=1}^{m} F(a_i). \tag{1.3}$$

Покажемо, що $F(x)$ є функцією розподілу кожної з випадкових величин ξ_m. Справді, використовуючи (1.1) та (1.2) , одержимо

$$P(\omega \in \Omega: \xi_m(\omega) < a) =$$

$$= P\left(\left\{x_j\right\}_{j=1}^{\infty} \in \Omega: \xi_m\left(\left\{x_j\right\}_{j=1}^{\infty}\right) < a\right) =$$

$$= P\left(\left\{x_j\right\}_{j=1}^{\infty} \in \Omega: \xi_1\left(\left\{x_j\right\}_{j=1}^{\infty}\right) \in \mathbb{R}, \dots, \xi_{m-1}\left(\left\{x_j\right\}_{j=1}^{\infty}\right) \in \mathbb{R}, \ \xi_m\left(\left\{x_j\right\}_{j=1}^{\infty}\right) < a\right) =$$

$$= F_m(+\infty, \dots, +\infty, a) = (F(+\infty))^{m-1} F(a) = F(a), \quad \forall m \in \mathbb{N}, \ \forall a \in \mathbb{R}.$$

Таким чином,

$$P\left(\xi_j < a\right) = F(a) \qquad \forall j \in \mathbb{N}, \ \forall a \in \mathbb{R},$$

тобто випадкові величини $\xi_n (n \in \mathbb{N})$ однаково розподілені. Тепер з (1.3) випливає незалежність однаково розподілених випадкових величин $\xi_1, \dots, \xi_n$ при будь-якому $\forall n \in \mathbb{N}$. Отже, $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин.

Приклад 1.2. Побудуємо приклад послідовності незалежних однаково розподілених випадкових величин, які приймають два значення $c < d$, тобто мають таблицю розподілу:

c_i	c	d
p_i	p	$1-p$

Відповідна функція розподілу, яку повинні мати такі випадкові величини, має вигляд:

$$F(a) = \begin{cases} 0, & a \le c, \\ p, & c < a \le d\ , \\ 1, & a > d\ , \end{cases}$$

Скористаємось прикладом 1.1. За формулою (1.1) визначаємо функцію

$$F_m(a_1, \dots, a_m) = \prod_{i=1}^{m} F(a_i) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \exists i \in \{1, \dots, m\} \ : a_i \le c, \\ 1, & a_i > d \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, \\ p^{k(a_1, \dots, a_m)}, & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

де $k(a_1, \dots, a_m)$ – кількість значень $a_1, \dots, a_m$, які потрапили в півінтервал $[c, d)$. Як і в прикладі 1.1, нехай $\Omega = \mathbb{R}^{\infty}$– множина всіх послідовностей дійсних чисел, $\mathcal{F} = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{\infty})$ - борельова сигма-алгебра підмножин простору $\mathbb{R}^{\infty}$, і P – ймовірнісна міра, яка побудована за функціями $F_m(a_1, \dots, a_m)$ і задовольняє рівність (1.2).

Визначимо на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ випадкові величини $\xi_n : \Omega \to \mathbb{R}$ наступною формулою:

$$\xi_n \left\{ \{x_j\}_{j=1}^{\infty} \right\} = x_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

В прикладі 1.1 було показано , що

$$P(\xi_n < a) = F(a), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall a \in \mathbb{R}.$$

Отже, всі випадкові величини $\xi_n (n \in \mathbb{N})$ приймають значення c, d з ймовірностями p та $1- p$ відповідно.

1.2 Єдиність розв'язку лінійного різницевого рівняння над $\mathbb{Z}$

1.2.1. Рівняння першого порядку. Нехай a та b – цілі числа та $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ - задана послідовність цілих чисел. Розглянемо задачу розв'язання в цілих числах наступного лінійного різницевого рівняння першого порядку:

$$bx_{n+1} + ax_n = f_n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.4}$$

Наступна теорема встановлює критерій єдиності цілочисельного розв'язку неявного рівняння (1.4).

Теорема 1.1[3]

Однорідне рівняння

$$bx_{n+1} + ax_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

має тільки тривіальний цілочисельний розв'язок тоді і тільки тоді, коли $a \nmid b$.

Наслідок 1.1 [3]. Рівняння (1.4) має не більш ніж одного розв'язку в цілих числах тоді і тільки тоді, коли $a \nmid b$.

1.2.2. Рівняння другого порядку.

Нехай a, b та c – цілі числа, для числа $k \in \mathbb{Z}$, $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ – задана послідовність цілих чисел. Розглянемо задачу розв'язання в цілих числах наступного лінійного різницевого рівняння другого порядку:

$$cx_{n+2} + bx_{n+1} + ax_n = f_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.5}$$

Рівняння (1.5) називається *неявним*, якщо c не дорівнює 0 та ±1 [4].

Неявне рівняння може не мати цілочисельних розв'язків. В [4] доведена наступна теорема, яка встановлює критерій єдиності цілочисельного розв’язку неявного рівняння

Теорема 1.2[4]. *Нехай* $c \nmid b$ *або* $c \nmid a$. *Неявне однорідне рівняння*

$$cx_{n+2} + bx_{n+1} + ax_n = 0, \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

має тільки нульовий розв’язок у цілих числах тоді і тільки тоді, коли характеристичне рівняння

$$c\lambda^2 - b\lambda - a = 0 \tag{1.6}$$

не має цілих коренів.

З теореми 1.2 випливають наступні наслідки.

Наслідок 1.1[4]. *Нехай* $c \nmid b$ *або* $c \nmid a$. *Неявне рівняння (1.5) має не більш одного розв’язку в цілих числах тоді і тільки тоді, коли характеристичне рівняння (1.6) не має цілих коренів.*

Наслідок 1.2 [4]. *Нехай* $c \nmid b$ *або* $c \nmid a$. *Припустимо, що* $f \in \mathbb{Z}$ *і характеристичне рівняння (1.6) не має цілих коренів. Тоді неявне лінійне різницеве рівняння*

$$cx_{n+2} + bx_{n+1} + ax_n = f, \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

має єдиний розв’язок в цілих числах тоді і тільки тоді, коли $(a+b+c) \neq 0$ *і* $(a+b+c)|f$. *Цей розв’язок є єдиним, сталим та має вигляд*

$$x_n = \frac{f}{a+b+c}, \ \ n \in \mathbb{N}_0.$$

Наведемо приклад застосування теореми 1.2

Приклад 1.3

Візьмемо $c = b = 2, a = 3$. Очевидно, $c \nmid a$. Отримаємо наступне рівняння

$$2x_{n+2} = 2x_{n+1} + 3x_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Характеристичне рівняння

$$2\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

має корені

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2},$$

що не є цілими числами. Отже, з теореми 1.2 маємо, що неявне однорідне рівняння

$$2x_{n+2} = 2x_{n+1} + 3x_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

має тільки нульовий розв'язок у цілих числах.

Наступний приклад застосування теореми 1.2 показує, що якщо характеристичне рівняння (1.6) має цілий корінь, то рівняння (1.5) має нетривіальний розв'язок:

Приклад 1.4

Візьмемо $c = 5,\ b = 6,\ a = 8$. Зауважимо, що $c \nmid a, b$. Рівняння (1.5) має наступний вигляд

$$5x_{n+2} = 6x_{n+1} + 8x_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Відповідне характеристичне рівняння

$$5\lambda^2 - 6\lambda - 8 = 0$$

має корені $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 0.8$. Отже, з теореми 1.2 маємо, що неявне однорідне рівняння має нетривіальні розв'язки. Зокрема, це рівняння має нетривіальний розв'язок $x_n = {\lambda_1}^n x_0 = 2^n x_0,\ n \in \mathbb{N}_0$ при будь-якому $x_0 \neq 0$.

Наведемо приклад неявного однорідного рівняння (1.5) яке має нетривіальний розв'язок, причому b та a діляться на c, проте відповідний характеристичне рівняння (1.6) не має цілих коренів.

Приклад 1.5

Візьмемо $c = 3,\ b = 6,\ a = 9$. Тут b та a діляться на c. Рівняння (1.5) має наступний вигляд:

$$3x_{n+2} = 6x_{n+1} + 9x_n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \qquad (1.7)$$

Відповідне характеристичне рівняння

$$3\lambda^2 - 6\lambda - 9 = 0$$

не має цілих коренів.

Розділивши рівняння (1.7) на $c = 3$, отримаємо наступне рівняння

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} + 3x_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

яке, очевидно, при будь-яких початкових умовах $x_0, x_1 \in \mathbb{Z}$ має єдиний розв'язок у цілих числах.

Це свідчить про суттєвість умови с $\nmid b$ *або* с $\nmid a$ теореми 1.2.

1.3. Неявне лінійне різницеве рівняння над $\mathbb{Z}$ першого порядку з випадковою правою частиною

Нехай a та b – цілі числа, $\mathbb{N}_0$ - множина невід'ємних цілих чисел, а $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ – послідовність незалежних, однаково розподілених цілозначних випадкових величин, які визначені на повному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Для $\omega \in \Omega$ розглянемо рівняння:

$$bx_{n+1} + ax_n = f_n(\omega), \qquad n \in \mathbb{N}_0. \qquad (1.8)$$

Нехай $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0}$ – множина всіх послідовностей $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ цілих чисел. З рівнянням (1.8) пов'язано наступну подію

$$A = \{\omega \in \Omega \colon \exists \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0}\ \forall n \in \mathbb{N}_0\ \ bx_{n+1} + ax_n = f_n(\omega)\}.$$

В роботі [6] знайдено умови, за яких ймовірність цієї події дорівнює 0. А саме, одержано наступну теорему.

Теорема 1.3 [6]. *Нехай $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, \pm 1$. Припустимо, що а не ділиться на b, і $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ послідовність незалежних цілозначних однаково розподілених випадкових величин, які мають невироджений розподіл. Тоді ймовірність* *існування розв'язку в цілих числах різницевого рівняння (1.8) дорівнює нулю, тобто*

$$P(\omega \in \Omega \ : \ \exists \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0} : \ bx_{n+1} + ax_n = f_n(\omega), n \in \mathbb{N}_0) = 0$$

Спочатку в [6, Теорема 3.1, Зауваження 3.2] цю теорему було доведено для рівняння

$$bx_{n+1} + ax_n = g_n(\omega), \ \ n \in \mathbb{N}_0 \tag{1.9}$$

у випадку, коли незалежні однаково розподілені випадкові величини $g_n(\omega)$ задовольняють вимогу

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} P(\omega \in \Omega : g_n(\omega) = bj + r) < 1, \quad r = 0, \dots, |b| - 1, \ \ n = 0,1,2, \dots \tag{1.10}$$

Потім за допомоги наступної леми рівняння (1.8) зводиться до рівняння (1.9) з послідовністю випадкових величини $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$, що задовольняє вимогу (1.10).

Лема 1.1 [6, Лема 3.6]. *Нехай $b \in \mathbb{N}$, $b \neq 1$ та $M \subset \mathbb{Z}$ - множина, яка містить принаймні два елементи. Припустимо, що всі елементи M належать одному і тому ж класу лишків за модулем b. Тоді існують $k \in \mathbb{N}$ та $r_0 \in \mathbb{Z}$ такі, що b^k ділить усі числа $l - r_0 \, (l \in M)$ і принаймні два числа $\frac{c - r_0}{b^k}, \frac{d - r_0}{b^k} (c, d \in M)$ належать до різних класів лишків за модулем b.*

Зауваження 1.1. В [6] показано, що припущення $b \nmid a$ у Теоремі 1.3 є суттєвим. Нехай a ділиться на b і нехай

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} P(\omega \in \Omega : f_n(\omega) = bj) = 1, \ \ n \in \mathbb{N}_0.$$

Тоді $P(A) \ = \ 1$. Наведемо відповідний приклад.

Приклад 1.5

Нехай $a = 4, b = -2$ і $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ послідовність незалежних однаково розподілених величин, що мають наступну таблицю розподілу:

c_i	-2	4
p_i	0.5	0.5

Тоді рівняння (1.8) приймає наступний вигляд:

$$-2x_{n+1} + 4x_n = f_n(\omega), \;\; n \in \mathbb{N}_0. \qquad (1.11)$$

Оскільки всі значення випадкової величини $f_n(\omega)$ діляться на c, то рівняння (1.11) є еквівалентним наступному рівнянню

$$x_{n+1} = 2x_n - g_n(\omega),$$

де випадкові величини $g_n(\omega) = \frac{f_n(\omega)}{2}$ мають наступну таблицю розподілу:

c_i	-1	2
p_i	0.5	0.5

Тоді для будь-якого $\omega \in \Omega$ і для будь-якої випадкової величини x_0 що приймає цілі значення, існує розв'язок рівняння

в цілих числах:

$$x_n(\omega) = 2^n x_0(\omega) - \sum_{j=0}^{n-1} 2^{n-1-j}\, g_j(\omega), \;\; n \in \mathbb{N}_0.$$

Отже

$$P(\{\omega \in \Omega\colon \exists \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0}\; \forall n \in \mathbb{N}_0 \;\; bx_{n+1} + ax_n = f_n(\omega)\}) \; = \; 1.$$

Зауваження 1.2 У Теоремі 1.3 припускається, що випадкові величини $f_n(n \in \mathbb{N}_0)$. мають невироджений розподіл. Нагадаємо, що випадкова величина f_n має вироджений розподіл, якщо ця випадкова величина приймає деяке фіксоване ціле число з ймовірністю 1. Як показано в [6, Зауваження 3.4] у цьому випадку $P(A)$ може дорівнювати 1. Наприклад, нехай $b = 2, a = -1$, і $f_n(\omega) = 1$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0, \omega \in \Omega$ [6]. Рівняння (1.8) має єдиний розв'язок $x_n = 1$ $(n \in \mathbb{N}_0)$. Таким чином, $P(A) = 1$. Отже, у Теоремі 1.3 обмеження невиродженості розподілу випадкових величин f_n є суттєвими.

2. Неявне неповне лінійне різницеве рівняння вищого порядку з випадковою правою частиною

2.1 Постановка задачі

Нехай, як і раніше, де a та b – цілі числа, а $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ – задана послідовність цілих чисел, Розглянемо задачу розв'язання в цілих числах наступного неявного неповного лінійного різницевого рівняння порядку m:

$$bx_{n+m} + ax_n = f_n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.1}$$

Якщо $b \neq \pm 1$, то рівняння (2.1) називається *неявним* над кільцем $\mathbb{Z}$ [5].

2.2 Основні результати

Наступна лема показує, що існує заміна невідомої послідовності, яка рівняння (2.1) приводить до рівняння вигляду (1.4).

Лема 2.1. *Послідовність* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ *– розв'язок в цілих числах рівняння* (2.1) *тоді і тільки тоді, коли для будь-якого* $r \in \{0, \ldots, m-1\}$, *послідовність* $y_n^{(r)} = x_{nm+r}$ $n \in \mathbb{N}_0$ *є розв'язком наступного рівняння в цілих числах*

$$by_{n+1}^{(r)} + ay_n^{(r)} = f_{nm+r}, \ n \in \mathbb{N}_0.$$

Доведення

Доведемо необхідність. Якщо $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ - розв'язок в цілих числах рівняння (2.1), то

$$by_{n+1}^{(r)} + ay_n^{(r)} = cx_{(n+1)m+r} + ax_{nm+r} = f_{nm+r}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Тепер доведемо достатність. Нехай $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ – розв'язок рівняння (2.1), покладемо $x_{km+r} = y_n^{(r)}$, $k \in \mathbb{N}_0, r \in \{0, \ldots, m-1\}$. Тим самим повністю визначено послідовність $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$. За основною теоремою арифметики для будь-якого $n \in \mathbb{N}_0$ існують єдині числа $k \in \mathbb{N}_0$ та $r \in \{0, \ldots, m-1\}$ такі, що

$$n = km + r.$$

Тоді

$$bx_{n+m} + ax_n = cx_{km+r+m} + ax_{km+r} =$$
$$= bx_{(k+1)m+r} + ax_{km+r} = by_{k+1}^{(r)} + ay_k^{(r)} = f_{km+r} = \ f_n \ \ n \in \mathbb{N}_0$$

Лему доведено.

Тепер нехай $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ – послідовність незалежних, однаково розподілених цілозначних випадкових величин, які визначено на повному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Для $\omega \ \in \ \Omega$, розглянемо неявне неповне лінійне рівняння:

$$bx_{n+m} + ax_n = f_n(\omega), \quad \ n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.2}$$

З рівнянням (2.2) пов'язано наступну подію

$$A = \{\omega \in \Omega : \exists \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0} \ \forall n \in \mathbb{N}_0 \ \ bx_{n+m} + ax_n = f_n(\omega)\}.$$

В наступній теоремі наведемо умови, за яких ймовірність цієї події дорівнює нулю.

Теорема 2.1 *Нехай $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, \pm 1$. Припустимо, що a не ділиться на b, і $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ - послідовність незалежних цілозначних однаково розподілених випадкових величин, які мають невироджений розподіл. Тоді ймовірність існування розв'язку в цілих числах різницевого рівняння (2.2) дорівнює нулю, тобто*

$$P(A) = 0.$$

Доведення

Якщо послідовність $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ задовольняє рівняння (2.2) то згідно з Лемою 2.1 послідовність $y_k^{(r)} = x_{mk+r}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $r \in \{0, \dots, m-1\}$ при кожному $\omega \in \Omega$ задовольняє наступне рівняння

$$by_{k+1}^{(r)} + ay_k^{(r)} = f_{mk+r}(\omega) \,, \quad k \in \mathbb{N}_0. \tag{2.3}$$

З рівнянням (2.3) пов'язана наступна подія:

$$\tilde{A} = \left\{\omega \in \Omega : \exists \left\{y_k^{(r)}\right\}_{k=0}^{\infty} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0} \ \ \forall k \in \mathbb{N}_0 \ \ by_{k+1}^{(r)} + ay_k^{(r)} = \ f_{mk+r}(\omega)\right\}. \tag{2.4}$$

За Теоремою 1.3 ймовірність події (2.4) дорівнює нулю, тобто $P(\tilde{A}) = 0$. Далі, оскільки

$$A = \{\omega \in \Omega: \exists \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0}\ \forall n \in \mathbb{N}_0\ \ bx_{n+m} + ax_n = f_n(\omega)\} \quad \subset$$

$$\subset \quad \tilde{A} = \left\{\omega \in \Omega: \exists \left\{y_k^{(r)}\right\}_{k=0}^{\infty} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0}\ \ \forall k \in \mathbb{N}_0\ by_{k+1}^{(r)} + ay_k^{(r)} = f_{mk}(\omega)\right\}$$

то з повноти ймовірнісного простору, та монотонності ймовірнісної міри випливає імплікація

$$0 \le P(A) \le P(\tilde{A}) = 0 \ \Rightarrow P(A) = 0.$$

Теорему доведено.

Як і для рівняння першого порядку припущення $b \nmid a$ у Теоремі 2.1 є суттєвим.

Теорема 2.2. *Нехай a ділиться на b і*

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} P(\omega \in \Omega: f_n(\omega) = bj) = 1,\ \ n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.5}$$

Тоді $P(A) = 1$.

Доведення

Оскільки a та кожне зі значень $f_n(\omega)$ $(n \in \mathbb{N}_0, \omega \in \Omega)$ діляться на b та $b \neq 0$ то можемо скоротити рівняння (2.2) на b. Отримаємо:

$$x_{n+m} + cx_n = g_n(\omega), \quad\ n \in \mathbb{N}_0, \tag{2.6}$$

де $c = \frac{a}{b}$ – ціле число, $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ - послідовність невироджених незалежних однаково розподілених випадкових величин, які приймають цілі значення:

$$g_n(\omega) = \frac{f_n(\omega)}{b}.$$

Тепер проведемо в рівнянні (2.6) наступну заміну

$$x_{km+r} = y_n^{(r)}\ , \ \ n = km + r, \quad k \in \mathbb{N}_0, r \in \{0, \dots, m-1\}.$$

Отримаємо рівняння першого порядку

$$y_{n+1}^{(r)} + c y_n^{(r)} \ = g_n(\omega), \ n \in \mathbb{N}_0, \omega \in \Omega.$$

Це рівняння при будь-якому $\omega \in \Omega$ і $r \in \{0, \dots, m-1\}$ має розв'язок для будь-якого заданого цілого числа $y_0^{(r)} = y_0^{(r)}(\ \omega)$.

А отже, за Лемою 2.1

$$P(\{\omega \in \Omega\colon \exists \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0}\ \forall n \in \mathbb{N}_0 \ \ x_{n+m} + \mathrm{c} x_n = g_n(\omega)\}) \ = \ 1.$$

Тому $P(A) = 1$.

2.3 Приклади

Наведемо приклад такого рівняння (2.2), для якого виконано умови теореми 2.2.

Приклад 2.1

Нехай $a = 6,\ \ b = -3,\ \ m \in \mathbb{N}$ і $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ – послідовність незалежних однаково розподілених величин, що мають наступну таблицю розподілу:

c_i	-6	9
p_i	0.5	0.5

Тоді рівняння (2.2) приймає наступний вигляд:

$$-3x_{n+m} + 6x_n = f_n(\omega),\ \ n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.7}$$

Оскільки всі значення випадкової величини $f_n(\omega)$ діляться на b, то рівняння (2.7) є еквівалентним наступному рівнянню

$$x_{n+m} = 2x_n + g_n(\omega), \quad (2.8)$$

де випадкові величини $g_n(\omega) = \frac{f_n(\omega)}{-3}$ мають наступну таблицю розподілу:

c_i	2	-3
p_i	0.5	0.5

Тоді, з Леми 2.1 випливає що при будь-якому послідовність $y_n^{(r)}(\omega) = x_{km+r}(\omega)$ задовольняє наступне рівняння:

$$y_{n+1}^{(r)} = 2y_n^{(r)} + g_{nm+r}(\omega).$$

Тому для будь-якого $\omega \in \Omega$ і для будь-якої випадкової величини $y_0^{(r)}(\omega)$ що приймає цілі значення, існує розв'язок наступного рівняння в цілих числах

$$y_n^{(r)}(\omega) = 2^n y_0^{(r)}(\omega) + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{n-1-j}\, g_j(\omega),\ \ n \in \mathbb{N}_0.$$

Тепер для будь-якого $\omega \in \Omega$ і для будь-яких випадкових величин $x_r\ r \in \{0, \dots, m-1\}$ що приймають цілі значення, існує розв'язок наступного рівняння в цілих числах

$$x_{mk+r}(\omega) = 2^k x_r(\omega) + \sum_{j=0}^{k-1} 2^{k-1-j}\, g_{mj+r}(\omega);\ k \in \mathbb{N}_0, r \in \{0, \dots, m-1\}. \quad (2.9)$$

Отже

$$P(\{\omega \in \Omega\colon \exists \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0}\ \forall n \in \mathbb{N}_0\ \ bx_{n+m} + ax_n = f_n(\omega)\})\ = 1.$$

Далі покажемо що умова невиродженості $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ в Теоремі 2.1 є суттєвою для твердження навіть якщо a не ділиться на b.

Приклад 2.2

Розглянемо випадок, коли випадкові величини f_n мають вироджений розподіл і a не ділиться на b. Наприклад, нехай $a = -1, b = 2$ і $f_n(\omega) = 1\ \forall\omega \in \Omega$. Це означає, що випадкова величина f_n приймає лише одне значення 1 з ймовірністю 1. Рівняння (2.2) має наступний вигляд

$$2x_{n+m} - x_n = 1, \quad n \in \mathbb{N}_0, \ \omega \in \Omega. \tag{2.10}$$

Проведемо заміну $n = km + r$, $x_{km+r} = y_n^{(r)}$, $k \in \mathbb{N}_0$,$r \in \{0, \dots, m-1\}$, та отримаємо рівняння:

$$2y_{n+1}^{(r)} - y_n^{(r)} = 1, \quad n \in \mathbb{N}_0, \ \omega \in \Omega. \tag{2.11}$$

Згідно із Зауваженням 1.2 для будь-якого $r \in \{0, \dots, m-1\}$ і $\omega \in \Omega$ рівняння (2.11) має розв'язок

$$y_n^{(r)} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Отже, з Леми 2.1 отримуємо розв'язок рівняння (2.10) при кожному фіксованому $\omega \in \Omega$, тобто

$$x_n = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, \ \forall\omega \in \Omega.$$

Тому

$$P(A) = P(\{\omega \in \Omega : \exists\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0}\ \forall n \in \mathbb{N}_0\ 2x_{n+m} - x_n = f_n\{\omega\}\}) = 1.$$

3. Неявне лінійне різницеве рівняння другого порядку з випадковою правою частиною

3.1 Постановка задачі

Нехай $a, b, c \in \mathbb{Z}$ і $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ – послідовність незалежних, однаково розподілених цілозначних випадкових величин, які визначено на повному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Для $\omega \in \Omega$ розглянемо неявне лінійне рівняння:

$$cx_{n+2} + bx_{n+1} + ax_n = f_n(\omega), \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.1}$$

З рівнянням (3.1) пов'язано наступну подію

$$A = \{\omega \in \Omega: \exists \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0},\ \ cx_{n+2} + bx_{n+1} + ax_n = f_n(\omega), \quad n \in \mathbb{N}_0\}. \tag{3.2}$$

Будем досліджувати ймовірність цієї події. У випадку явного лінійного різницевого рівняння ($\text{c} = \pm 1$) маємо $P(A) = 1$.

3.2 Основні результати

В наступній теоремі наведемо достатні умови, за яких ймовірність події A дорівнює нулю аналогічно тому, як це було зроблено в [6] для неявного лінійного рівняння першого порядку.

Теорема 3.1. *Нехай* $a, b, c \in \mathbb{Z}, c \neq 0, \pm 1$ *і* $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ *– послідовність незалежних однаково розподілених цілозначних випадкових величин таких, що*

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} P(\omega \in \Omega: f_n(\omega) = cj + r) < 1, \quad r = 0, \dots, |c| - 1, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.3}$$

Тоді $P(A) = 0$*, де подія A визначається за допомогою* (3.2).

Доведення.

Визначимо ймовірнісну міру μ на множині цілих чисел $\mathbb{Z}$ наступним чином:

$$\mu(\{z\}) = P(\omega \in \Omega\colon\ f_n(\omega) = z), \qquad z \in \mathbb{Z} \ \ n \in \mathbb{N}_0$$

Визначимо події

$$A_{x_0,x_1} = \{\omega \in \Omega\colon \exists \{x_n\}_{n=2}^{\infty} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_2}, cx_{n+2} + bx_{n+1} + ax_n = f_n(\omega), n \in \mathbb{N}_0\} \quad (3.4)$$

та

$$A_{x_0,x_1}^m = \{\omega \in \Omega\colon \exists \{x_n\}_{n=2}^{m+2} \in \mathbb{Z}^m, cx_{n+2} + bx_{n+1} + ax_n = f_n(\omega), n = 0, \dots, m\}$$

для чисел $x_0, x_1 \in \mathbb{Z}$ та $m \in \mathbb{N}_0$. Маємо

$$A = \bigcup_{x_0,x_1 \in \mathbb{Z}} A_{x_0,x_1}, \tag{3.5}$$

$$A_{x_0,x_1} = \bigcap_{m=0}^{\infty} A_{x_0,x_1}^m, \quad A_{x_0,x_1}^m \supset A_{x_0,x_1}^{m+1}. \tag{3.6}$$

Покажемо, що для будь-яких $x_0, x_1 \in \mathbb{Z}$ справедливо

$$P\left(A_{x_0,x_1}\right) = 0. \tag{3.7}$$

Для $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{m+2} \in \mathbb{Z}$ введемо подію

$$B_{x_0,x_1,x_2,\dots,x_{m+2}} = \{\omega \in \Omega\colon f_n(\omega) = cx_{n+2} + bx_{n+1} + ax_n,\ \ n = 0, \dots, m\}$$

$$A_{x_0,x_1}^m = \bigcup_{x_2=-\infty}^{\infty} \dots \bigcup_{x_{m+2}=-\infty}^{\infty} B_{x_0,x_1,\dots x_{m+2}}^m. \tag{3.8}$$

Покажемо, що

$$B_{x_0,x_1,y_2,\dots,y_{m+2}} \cap\ B_{x_0,x_1,x_2,\dots,x_{m+2}} = \emptyset, \quad (x_2, \dots, x_{m+2}) \neq (y_2, \dots, y_{m+2}) \tag{3.9}$$

де $y_2, \dots, y_{m+2} \in \mathbb{Z}$.

Припустимо зворотне: існують числа $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{m+2},\ y_2, \dots, y_{m+2} \in \mathbb{Z}$ такі, що $(x_2, \dots, x_{m+2}) \neq (y_2, \dots, y_{m+2})$ та

$$B_{x_0,x_1,y_2,\dots,y_{m+2}} \cap\ B_{x_0,x_1,x_2,\dots,x_{m+2}} \neq \emptyset.$$

Це означає, що існує таке

$$\omega \in B_{x_0,x_1,y_2,\dots,y_{m+2}} \cap \ B_{x_0,x_1,x_2,\dots,x_{m+2}}$$

для якого виконано рівності

$$\begin{cases} f_n(\omega) = cx_{n+2} + bx_{n+1} + ax_n \\ f_n(\omega) = cy_{n+2} + by_{n+1} + ay_n \end{cases} \quad n = 0, \dots, m \qquad (3.10)$$

причому

$$x_0 = y_0, \qquad x_1 = y_1.$$

Тепер методом математичної індукції по m доведемо, що в цьому випадку

$$(x_2, \dots, x_{m+2}) = (y_2, \dots, y_{m+2}). \qquad (3.11)$$

База індукції. Нехай $m = 0$. Розглянемо рівності (3.6) при $n = 0$

$$\begin{cases} f_0(\omega) = cx_2 + bx_1 + ax_0 \\ f_0(\omega) = cy_2 + by_1 + ay_0 \end{cases}$$

Оскільки $x_0 = y_0, \ x_1 = y_1$, то з цих рівностей випливає

$$c(x_2 - y_2) = 0.$$

Оскільки $c \neq 0$, то маємо $x_2 = y_2$

Індуктивний перехід. Нехай рівність (3.11) виконано при $m = l - 1$ для деякого $l \in \mathbb{N}$:

$$(x_2, \dots, x_l, x_{l+1}) = (y_2, \dots, y_l, y_{l+1}).$$

Доведемо рівність (3.9) при $m = l$. Для цього достатньо довести, що $x_{l+2} = y_{l+2}$. При $n = l$ з рівності (3.10) випливає

$$\begin{cases} f_l(\omega) = cx_{l+2} + bx_{l+1} + ax_l \\ f_l(\omega) = cy_{l+2} + by_{l+1} + ay_l \end{cases}$$

Згідно з припущенням індукції $x_l = y_l, \ x_{l+1} = y_{l+1}$, тому з наведеної системи рівностей випливає

$$c(x_{l+2} - y_{l+2}) = 0.$$

Оскільки $c \neq 0$, то $x_{l+2} = y_{l+2}$. Отже, рівність (3.11) доведено для будь-якого m. З цього випливає властивість (3.9). Ця властивість дозволяє застосувати зліченну адитивність міри P до рівності (3.8):

$$P\left(A_{x_0,x_1}^m\right) = \sum_{x_2 \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{x_{m+1} \in \mathbb{Z}} \sum_{x_{m+2} \in \mathbb{Z}} P\left(B_{x_0,x_1,x_2,\dots,x_{m+2}}\right). \quad (3.12)$$

З незалежності випадкових величин $f_0, \dots, f_m$ випливає, що

$$P\left(B_{x_0,x_1,x_2,\dots,x_{m+2}}\right) = \prod_{n=0}^{m} P(\omega \in \Omega : f_n(\omega) = cx_{n+2} + bx_{n+1} + ax_n). \quad (3.13)$$

Підставляючи (3.13) у (3.12), одержимо

$$P\left(A_{x_0,x_1}^m\right) =$$

$$= \sum_{x_2 \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{x_{m+1} \in \mathbb{Z}} \sum_{x_{m+2} \in \mathbb{Z}} \prod_{n=0}^{m} P(\omega \in \Omega : f_n(\omega) = cx_{n+2} + bx_{n+1} + ax_n) =$$

$$= \sum_{x_2 \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{x_{m+1} \in \mathbb{Z}} \sum_{x_{m+2} \in \mathbb{Z}} \prod_{n=0}^{m-1} P(\omega \in \Omega : f_n(\omega) = cx_{n+2} + bx_{n+1} + ax_n) \cdot$$

$$\cdot P(\omega \in \Omega : f_m(\omega) = cx_{m+2} + bx_{m+1} + ax_m) =$$

$$= \sum_{x_2 \in \mathbb{Z}} \dots \sum_{x_{m+1} \in \mathbb{Z}} \prod_{n=0}^{m-1} P(\omega \in \Omega : f_n(\omega) = cx_{n+2} + bx_{n+1} + ax_n) \cdot$$

$$\cdot \sum_{x_{m+2} \in \mathbb{Z}} P(\omega \in \Omega : f_m(\omega) = cx_{m+2} + bx_{m+1} + ax_m) =$$

$$= \sum_{x_2 \in \mathbb{Z}} \mu(\{cx_2 + bx_1 + ax_0\}) \cdot \dots \cdot \sum_{x_{m+2} \in \mathbb{Z}} \mu(\{cx_{m+2} + bx_{m+1} + ax_m\}).$$

Отже,

$$P\left(A_{x_0,x_1}^m\right) =$$

$$= \sum_{x_2 \in \mathbb{Z}} \mu(\{cx_2 + bx_1 + ax_0\}) \cdot \dots \cdot \sum_{x_{m+2} \in \mathbb{Z}} \mu(\{cx_{m+2} + bx_{m+1} + ax_m\}). \quad (3.14)$$

Оскільки $c \neq 0, \pm 1$, для будь-яких $x_{m+1}, x_m \in \mathbb{Z}$, існують цілі числа $k = k(x_{m+1}, x_m) \in \mathbb{Z}$ і $r = r(x_{m+1}, x_m) \in \{0, \dots, |c| - 1\}$ такі, що

$$bx_{m+1} + ax_m = ck(x_{m+1}, x_m) + r(x_{m+1}, x_m).$$

Для будь-якого $x_m, x_{m+1} \in \mathbb{Z}$ маємо

$$\sum_{x_{m+2} \in \mathbb{Z}} P(\omega \in \Omega : f_m(\omega) = cx_{m+2} + bx_{m+1} + ax_m) =$$

$$= \sum_{x_{m+2} \in \mathbb{Z}} \mu(\{cx_{m+2} + bx_{m+1} + ax_m\}) =$$

$$= \sum_{x_{m+2} \in \mathbb{Z}} \mu(\{cx_{m+2} + ck(x_{m+1}, x_m) + r(x_{m+1}, x_m)\}) =$$

$$= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mu(\{cj + r(x_{m+1}, x_m)\}) \leq q,$$

де

$$q = \max_{r=0,\dots,|c|-1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mu(\{cj + r(x_{m+1}, x_m)\}) \in (0,1)$$

за припущенням (2.3) теореми та умовою $c \neq 0, \pm 1$. Отже,

$$\sum_{x_{m+2} \in \mathbb{Z}} P(\omega \in \Omega : f_m(\omega) = cx_{m+2} + bx_{m+1} + ax_m) \leq q, \ \ \forall x_m, x_{m+1} \in \mathbb{Z}. \quad (3.15)$$

Тепер оцінимо праву частину рівності (3.14) за допомогою нерівності (3.15). Отримаємо

$$P\left(A^m_{x_0, x_1}\right) \leq$$

$$\leq q \sum_{x_2 \in \mathbb{Z}} \mu(\{cx_2 + bx_1 + ax_0\}) \dots \sum_{x_{m+1} \in \mathbb{Z}} \mu(\{cx_{m+2} + bx_{m+1} + ax_m\}) =$$

$$= qP\left(A^{m-1}_{x_0, x_1}\right).$$

Тому

$$P\left(A_{x_0,x_1}^m\right) \le qP\left(A_{x_0,x_1}^{m-1}\right) \le \cdots \le q^{m-1}P\left(A_{x_0,x_1}^1\right).$$

Оскільки $q \in (0,1)$, то $\lim_{m\to\infty} P(A_{x_0,x_1}^m) = 0$ для всіх $x_0, x_1 \in \mathbb{Z}$.

За неперервністю зверху міри P з співвідношень (3.6) випливає

$$P(A_{x_0,x_1}) = \lim_{m\to\infty} P(A_{x_0,x_1}^m) = 0 \qquad (3.16)$$

Рівність (3.7) доведена. Використовуючи зліченну півадитивність міри P та рівність (3.5), одержимо

$$P(A) \le \sum_{x_0,x_1\in\mathbb{Z}} P\left(A_{x_0,x_1}\right) = 0.$$

Звідси випливає $P(A) = 0$.

Теорему доведено.

Зауваження 3.1. Умова вигляду (3.3) раніше виникала при дослідженні неявного лінійного різницевого рівняння першого порядку в [6].

Позначимо через $\mathbb{N}_k$ множину цілих чисел, що не менш ніж k. Наступний приклад показує¸ що події A_{x_0,x_1}, що визначено при доведенні теореми 3.1 формулою (3.4), можуть бути сумісними, тобто

$$A_{x_0,x_1} \cap A_{y_0,y_1} \ne \emptyset, (x_0, x_1) \ne (y_0, y_1). \qquad (3.17)$$

Приклад 3.1. Нехай $c = 2, b = 6, a = 10$. Візьмемо послідовність незалежних однаково розподілених цілозначних випадкових величин $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ з наступною таблицею розподілу.

d_i	1	6
p_i	0.5	0.5

де $d_i\ (i = 1,2)$– значення випадкової величини f_n, а $p_i = P(f_n = d_i)$ (див. підрозділ 1.1, приклад 1.2). Рівняння (3.1) приймає наступний вигляд:

$$2x_{n+2} + 6x_{n+1} + 10x_n = f_n(\omega), \quad \omega \in \Omega, n \in \mathbb{N}_0.$$

Нехай $H = \{\omega \in \Omega: f_n(\omega) = 6, n \in \mathbb{N}_0\}$. Тоді $H \neq \emptyset$.

Покажемо, що $H \subset A_{x_0,x_1}$ для будь-яких $x_0, x_1 \in \mathbb{Z}$, що тягне за собою (3.17). Для $\omega \in H$ отримуємо наступне рівняння:

$$2x_{n+2} + 6x_{n+1} + 10x_n = 6, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

яке, в свою чергу, еквівалентне наступному рівнянню:

$$x_{n+2} + 3x_{n+1} + 5x_n = 3, \quad n \in \mathbb{N}_0. \qquad (3.18)$$

При будь-яких $x_0, x_1 \in \mathbb{Z}$ є єдиний розв’язок $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0}$ рівняння (3.18), елементи якого обчислюються за рекурентною формулою:

$$x_n = 3 - 3x_{n-1} - 5x_{n-2}, \ n \in \mathbb{N}_2.$$

Проте, при доведенні теореми 3.1 було показано, що $P(A_{x_0,x_1}) = 0$ (див. рівність (3.16), тому в умовах теореми 3.1 $P(A_{x_0,x_1} \cap A_{y_0,y_1}) = 0$ навіть, якщо має місце (3.17).

Зауваження 3.2. В прикладі 3.1 для послідовності незалежних однаково розподілених цілозначних випадкових величин $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ з наступною таблицею розподілу

d_i	1	6
p_i	0.5	0.5

вводиться подія

$$H = \{\omega \in \Omega: f_n(\omega) = 6, n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Покажемо що її ймовірність дорівнює нулю.

З незалежності величин $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ отримуємо:

$$P(\omega \in \Omega: f_n(\omega) = 6, n \in \mathbb{N}_0) = \prod_{k=0}^{\infty} P(\omega \in \Omega: f_k(\omega) = 6)$$

де

$$P(\omega \in \Omega: f_n(\omega) = 6) = 0.5 \text{ при всіх } n \in \mathbb{N}_0.$$

А отже

$$P(\omega \in \Omega: f_n(\omega) = 6, n \in \mathbb{N}_0) = 0.$$

Тобто

$$P(H) = 0.$$

Наступна теорема показує, що при додаткових умовах на коефіцієнти a, b, c рівняння (3.1) твердження теореми 3.1 є справедливим для будь-яких незалежних цілозначних однаково розподілених випадкових величин f_n, які мають невироджений розподіл.

Теорема 3.2. *Нехай* $a, b, c \in \mathbb{Z}, c \neq 0, \pm 1$. *Припустимо, що* $gcd(a + b, c) = 1$ *і* $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ *- послідовність незалежних цілозначних однаково розподілених випадкових величин, які мають невироджений розподіл. Тоді ймовірність існування розв'язку в цілих числах різницевого рівняння (3.1) дорівнює нулю, тобто*

$$P(A) = 0.$$

Доведення. Не порушуючи загальність, ми припускаємо, що $c \in \mathbb{N}$, тобто $c \geq 2$. За Теоремою 3.1, достатньо довести Теорему 3.2 для випадку, коли умова (3.3) не виконується. Це означає, що випадкові величини f_n задовольняють наступну умову

$$\exists r \in \{0,1, \dots, \mathrm{c} - 1\}: \sum_{j \in \mathbb{Z}} P(f_n = cj + r) = 1. \tag{3.19}$$

Розглянемо множину $M \subset \mathbb{Z}$ всіх значень випадкової величини f_n. Оскільки випадкова величина f_n є невиродженою, то ця множина містить принаймні два елементи. За припущенням (3.19), кожен елемент множини M має одну й ту саму остачу r при діленні на c. Тому всі елементи M належать до одного класу лишків за модулем c. За Лемою 1.1, існують числа $k \in \mathbb{N}$ та $r_0 \in \mathbb{Z}$ такі, що c^k ділить всі числа $l - r_0$ $(l \in M)$ і принаймні два числа $\frac{h-r_0}{c^k}, \frac{s-r_0}{c^k} (h, s \in M)$ належать до різних класів лишків за модулем b. Це означає, що випадкові величини $g_n = \frac{f_n - r_0}{c^k}$, $n \in \mathbb{N}_0$ приймають принаймні два різних значення $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$, які належать до різних класів лишків за модулем c. Крім того, випадкові величини g_n, $n \in \mathbb{N}_0$ є незалежними та мають невироджений розподіл. Отже,

$$f_n(\omega) = c^k g_n(\omega) + r_0,\ \omega \in \Omega,\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{3.20}$$

Підставивши вираз (3.20) для f_n у рівняння (3.1), ми отримуємо різницеве рівняння

$$\mathrm{c}x_{n+2} + bx_{n+1} + ax_n = \mathrm{c}^k g_n(\omega) + r_0, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.21}$$

Це означає, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}_0$ число $r_0 - bx_{n+1} - ax_n$ є кратним числу c. Тому існує послідовність $\left\{x_n^{(1)}\right\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0}$ така, що

$$r_0 - bx_{n+1} - ax_n = cx_n^{(1)}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Тобто

$$bx_{n+1} + ax_n = r_0 - cx_n^{(1)}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.22}$$

Підставимо (3.22) у (3.21)

$$\mathrm{c}x_{n+2} + r_0 - cx_n^{(1)} = \mathrm{c}^k g_n(\omega) + r_0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Звідси одержуємо рівності

$$x_{n+2} = x_n^{(1)} + \mathrm{c}^{k-1} g_n(\omega), \qquad n \in \mathbb{N}_0, \tag{3.23}$$

$$x_{n+1} = x_{n-1}^{(1)} + \mathrm{c}^{k-1} g_{n-1}(\omega), \quad n \in \mathbb{N}_1, \tag{3.24}$$

$$x_n = x_{n-2}^{(1)} + \mathrm{c}^{k-1} g_{n-2}(\omega), \quad n \in \mathbb{N}_2. \tag{3.25}$$

Підставляючи (3.23), (3.24), (3.25) у (3.21) ми отримуємо, що послідовність $\left\{x_n^{(1)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ є розв'язком в цілих числах різницевого рівняння

$$\mathrm{c}\left(x_n^{(1)}+\mathrm{c}^{k-1}g_n(\omega)\right)+b\left(x_{n-1}^{(1)}+\mathrm{c}^{k-1}g_{n-1}(\omega)\right)+\ a\left(x_{n-2}^{(1)}+\mathrm{c}^{k-1}g_{n-2}(\omega)\right)=$$

$$=\mathrm{c}^k g_n(\omega)+r_0,\quad n\in\mathbb{N}_2$$

$$cx_n^{(1)}+bx_{n-1}^{(1)}+ax_{n-2}^{(1)}+b\mathrm{c}^{k-1}g_{n-1}(\omega)+\ a\mathrm{c}^{k-1}g_{n-2}(\omega)=r_0,\quad n\in\mathbb{N}_2$$

$$cx_n^{(1)}+bx_{n-1}^{(1)}+ax_{n-2}^{(1)}=-\mathrm{c}^{k-1}\big(bg_{n-1}(\omega)+\ ag_{n-2}(\omega)\big)+r_0,\qquad n\in\mathbb{N}_2$$

Тепер для зручності зсунемо індекс $n-2\to n$. Отримаємо різницеве рівняння

$$cx_{n+2}^{(1)}+bx_{n+1}^{(1)}+ax_n^{(1)}=-\mathrm{c}^{k-1}\big(bg_{n+1}(\omega)+\ ag_n(\omega)\big)+r_0,\ n\in\mathbb{N}_0. \quad (3.26)$$

Якщо ввести випадкові величини $g_n^{(1)}(\omega)=-\big(bg_{n+1}(\omega)+\ ag_n(\omega)\big)$, то рівняння (3.26) переписується в вигляді

$$cx_{n+2}^{(1)}+bx_{n+1}^{(1)}+ax_n^{(1)}=-\mathrm{c}^{k-1}g_n^{(1)}(\omega)+r_0,\quad n\in\mathbb{N}_0. \quad (3.27)$$

Аналогічно переходу від рівняння (3.21) до рівняння (3.27), існує послідовність цілих чисел $\left\{x_n^{(2)}\right\}_{n=0}^{\infty}$, яка задовольняє лінійне різницеве рівняння

$$cx_{n+2}^{(2)}+bx_{n+1}^{(2)}+ax_n^{(2)}=\mathrm{c}^{k-2}g_n^{(2)}(\omega)+r_0,\quad n\in\mathbb{N}_0,$$

де

$$g_n^{(2)}=-\left(bg_{n+1}^{(1)}(\omega)+\ ag_n^{(1)}(\omega)\right)=$$

$$=-\left(-b\big(bg_{n+2}(\omega)+\ ag_{n+1}(\omega)\big)-a\big(bg_{n+1}(\omega)+\ ag_n(\omega)\big)\right)=$$

$$=(-1)^2\big(b^2g_{n+2}(\omega)+2abg_{n+1}(\omega)+\ a^2g_n(\omega)\big).$$

Тепер, за допомоги методу математичної індукції, доведемо, що якщо існує послідовність цілих чисел $\left\{x_n^{(0)}\right\}_{n=0}^{\infty}=\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, що задовольняє рівняння

(3.21), то при будь-якому $m = 0, \dots, k$ існує послідовність цілих чисел $\left\{x_n^{(m)}\right\}_{n=0}^{\infty}$, яка задовольняє лінійне різницеве рівняння

$$cx_{n+2}^{(m)} + bx_{n+1}^{(m)} + ax_n^{(m)} = \mathrm{c}^{k-m} g_n^{(m)}(\omega) + r_0$$

де

$$g_n^{(m)}(\omega) = (-1)^m \sum_{j=0}^{m} g_{n+j}(\omega) \binom{m}{j} a^{m-j} b^j.$$

База індукції: $m = 1$. Це вже описаний перехід від рівняння (3.21) до рівняння (3.27).

Індуктивний перехід

Нехай твердження індукції вірне при $m = l - 1$. Тобто для деякого $l \in \mathbb{N}$ існує послідовність цілих чисел $\left\{x_n^{(l-1)}\right\}_{n=0}^{\infty}$, яка задовольняє лінійне різницеве рівняння

$$cx_{n+2}^{(l-1)} + bx_{n+1}^{(l-1)} + ax_n^{(l-1)} = \mathrm{c}^{k-l+1} g_n^{(l-1)}(\omega) + r_0 \tag{3.28}$$

де

$$g_n^{(l-1)}(\omega) = (-1)^{l-1} \sum_{j=0}^{l-1} g_{n+j}(\omega) \binom{l-1}{j} a^{l-1-j} b^j. \tag{3.29}$$

Це означає, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}_0$ число $r_0 - bx_{n+1}^{(l-1)} - ax_n^{(l-1)}$ є кратним числу c. Тому існує послідовність $\left\{x_n^{(l)}\right\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0}$ така, що

$$r_0 - bx_{n+1}^{(l-1)} - ax_n^{(l-1)} = cx_n^{(l)}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Тобто

$$bx_{n+1}^{(l-1)} + ax_n^{(l-1)} = r_0 - cx_n^{(l)}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.30}$$

Підставимо (3.30) у (3.28)

$$cx_{n+2}^{(l-1)} + r_0 - cx_n^{(l)} = \mathrm{c}^{k-l+1} g_n^{(l-1)}(\omega) + r_0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Звідси одержуємо рівності

$$x_{n+2}^{(l-1)} = x_n^{(l)} + \mathrm{c}^{k-l} g_n^{(l-1)}(\omega), \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.31}$$

$$x_{n+1}^{(l-1)} = x_{n-1}^{(l)} + \mathrm{c}^{k-l} g_{n-1}^{(l-1)}(\omega), \quad n \in \mathbb{N}_1. \tag{3.32}$$

$$x_n^{(l-1)} = x_{n-2}^{(l)} + \mathrm{c}^{k-l} g_{n-2}^{(l-1)}(\omega), \quad n \in \mathbb{N}_2. \tag{3.33}$$

Підставляючи (3.31), (3.32), (3.33) у (3.28) ми отримуємо, що послідовність $\left\{x_n^{(l)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ є розв'язком в цілих числах різницевого рівняння

$$\mathrm{c}\left(x_n^{(l)} + \mathrm{c}^{k-l} g_n^{(l-1)}(\omega)\right) + b\left(x_{n-1}^{(l)} + \mathrm{c}^{k-l} g_{n-1}^{(l-1)}(\omega)\right) +$$

$$+ a\left(x_{n-2}^{(l)} + \mathrm{c}^{k-l} g_{n-2}^{(l-1)}(\omega)\right) = \mathrm{c}^{k-l+1} g_n^{(l-1)}(\omega) + r_0, \quad n \in \mathbb{N}_2$$

$$cx_n^{(l)} + bx_{n-1}^{(l)} + ax_{n-2}^{(l)} + b\mathrm{c}^{k-l} g_{n-1}^{(l-1)}(\omega) + a\mathrm{c}^{k-l} g_{n-2}^{(l-1)}(\omega) = r_0, \quad n \in \mathbb{N}_2$$

$$cx_n^{(l)} + bx_{n-1}^{(l)} + ax_{n-2}^{(l)} = \mathrm{c}^{k-l}\left(-b g_{n-1}^{(l-1)}(\omega) - a g_{n-2}^{(l-1)}(\omega)\right) + r_0, \quad n \in \mathbb{N}_2.$$

Тепер для зручності зсунемо індекс $n-2 \to n$. Отримаємо різницеве рівняння

$$cx_{n+2}^{(l)} + bx_{n+1}^{(l)} + ax_n^{(l)} =$$

$$= \mathrm{c}^{k-l}\left(-b g_{n+1}^{(l-1)}(\omega) - a g_n^{(l-1)}(\omega)\right) + r_0, \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{3.34}$$

Розкладемо вираз у дужках з правої частини згідно припущенню індукції за формулою (3.29):

$$-b g_{n+1}^{(l-1)}(\omega) - a g_n^{(l-1)}(\omega) = -b(-1)^{l-1} \sum_{j=0}^{l-1} g_{n+1+j}(\omega) \binom{l-1}{j} a^{l-1-j} b^j -$$

$$-a(-1)^{l-1} \sum_{j=0}^{l-1} g_{n+j}(\omega) \binom{l-1}{j} a^{l-1-j} b^j =$$

$$= (-1)^l \left(\sum_{j=0}^{l-1} g_{n+1+j}(\omega) \binom{l-1}{j} a^{l-1-j} b^{j+1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{l-1} g_{n+j}(\omega) \binom{l-1}{j} a^{l-j} b^j \right) =$$

$$= (-1)^l \left(\sum_{j=1}^{l} g_{n+j}(\omega) \binom{l-1}{j-1} a^{l-j} b^j + \sum_{j=0}^{l-1} g_{n+j}(\omega) \binom{l-1}{j} a^{l-j} b^j \right) =$$

$$= (-1)^l \left(\sum_{j=0}^{l} g_{n+j}(\omega) \binom{l}{j} a^{l-j} b^j \right) = g_n^{(l)}(\omega).$$

Отже рівняння (3.36) можна переписати у вигляді

$$cx_{n+2}^{(l)} + bx_{n+1}^{(l)} + ax_n^{(l)} = \mathrm{c}^{k-l} g_n^{(l)}(\omega) + r_0, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Обґрунтування індуктивного переходу завершено.

Тому отримуємо,

$$A = \{\omega \in \Omega: \exists \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0} \ \forall n \in \mathbb{N}_0 \ \mathrm{c}x_{n+2} + bx_{n+1} + ax_n = \ f_n(\omega)\} \subset$$

$$\subset \left\{ \omega \in \Omega: \exists \left\{ x_n^{(1)} \right\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0} \forall n \in \mathbb{N}_0 cx_{n+2}^{(1)} + bx_{n+1}^{(1)} + ax_n^{(1)} = \right.$$

$$\left. = -\mathrm{c}^{k-1} g_n^{(1)}(\omega) + r_0 \right\} \subset$$

$$\subset \left\{ \omega \in \Omega: \exists \left\{ x_n^{(2)} \right\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0} \ \forall n \in \mathbb{N}_0 \ cx_{n+2}^{(2)} + bx_{n+1}^{(2)} + ax_n^{(2)} = \right.$$

$$\left. = \mathrm{c}^{k-2} g_n^{(2)}(\omega) + r_0 \right\} \subset$$

$$\subset \cdots \subset$$

$$\subset \left\{ \omega \in \Omega: \exists \left\{ x_n^{(k)} \right\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0} \ \forall n \in \mathbb{N}_0 \ cx_{n+2}^{(k)} + bx_{n+1}^{(k)} + ax_n^{(k)} = g_n^{(k)}(\omega) + r_0 \right\}$$

тобто $A \ \subset \ B$, де

$$B =$$

$$= \left\{\omega \in \Omega : \exists \left\{x_n^{(k)}\right\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0}\ \forall n \in \mathbb{N}_0\ cx_{n+2}^{(k)} + bx_{n+1}^{(k)} + ax_n^{(k)} = g_n^{(k)}(\omega) + r_0\right\}$$

де

$$g_n^{(k)}(\omega) = (-1)^k \sum_{j=0}^{k} g_{n+j}(\omega) \binom{k}{j} a^{k-j} b^j.$$

Покажемо, що випадкові величини $g_n^{(k)}(\omega)$ задовольняють умову (3.3). Для цього достатньо показати, що випадкові величини приймають два значення, що належать різним класам лишків за модулем c. Оскільки

$$\left\{\omega \in \Omega : g_n(\omega) = l_j\right\} \subset$$

$$\subset \left\{\omega \in \Omega : g_n^{(k)}(\omega) = (-1)^k l_j (a+b)^k\right\},\ \ j \in \{1,2\};\ \ n\ \in \mathbb{N}_0,$$

та $P\left\{\omega \in \Omega : g_n(\omega) = l_j\right\} > 0$, то

$$P\left\{\omega \in \Omega : g_n^{(k)}(\omega) = (-1)^k l_j (a+b)^k\right\} \geq\ P\left\{\omega \in \Omega : g_n(\omega) = l_j\right\} > 0.$$

Припустимо протилежне, що числа $(-1)^k l_1 (a+b)^k$ та $(-1)^k l_2 (a+b)^k$ належать одному класу лишків за модулем c. Тоді ціле число $(l_1 - l_2)(a+b)^k$ є кратним числу c. За умовою числа $(a+b)$ та c є взаємно простими, тоді числа $(a+b)^k$ та c теж є взаємно простими. Тоді [8. с.26], отримуємо що $c|(l_1 - l_2)$. Це суперечить припущенню, що числа l_1 та l_2 належать до різних класів за модулем c. Таким чином, випадкові величини $g_n^{(k)}(\omega)$ задовольняють умову (3.3). Тоді за теоремою 3.2 $P(B) = 0$, а оскільки $A\ \subset\ B$, то й $P(A) = 0$.

3.3 Приклади

Покажемо що умова $gcd(a+b, c) = 1$ в Теоремі 3.2, як і умова (3.3) теореми 3.1 є суттєвою для твердження цих теорем.

Приклад 3.2

Нехай $a = 6,\ b = -3,\ c = 3$ тоді $gcd(a+b, c) = 3,\ \{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ – послідовність незалежних однаково розподілених величин, що мають наступну таблицю розподілу:

d_i	-6	9
p_i	0.5	0.5

Оскільки

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} P(f_n(\omega) = cj) = P(f_n(\omega) = -6) + P(f_n(\omega) = 9) = 1,$$

то умову (3.3) теореми 3.1 також не виконано.

Рівняння (3.1) приймає наступний вигляд:

$$3x_{n+2} - 3x_{n+1} + 6x_n = f_n(\omega),\ \ n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.35}$$

Оскільки всі значення випадкової величини $f_n(\omega)$ діляться на *c,* то рівняння (3.35) є еквівалентним наступному рівнянню

$$x_{n+2} = x_{n+1} - 2x_n + g_n(\omega), \tag{3.36}$$

де випадкові величини $g_n(\omega) = \frac{f_n(\omega)}{3}$ мають наступну таблицю розподілу:

d_i	-2	3
p_i	0.5	0.5

Отже, користуючись рекурентною формулою (3.36), для будь-яких обраних $x_0, x_1 \in \mathbb{Z}$, завжди можна побудувати послідовність $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ таку, що буде розв'язком рівняння (3.35).

Тому

$$P(A) =$$

$$= P\left(\omega \in \Omega\colon\ \exists \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0}\ \forall n \in \mathbb{N}_0\ \ 3x_{n+2} - 3x_{n+1} + 6x_n = f_n(\omega)\right) = 1.$$

Наступний приклад показує, що умова незалежності випадкових величин f_n в теоремах 3.1 та 3.2 є суттєвою для твердження.

Приклад 3.3. Розглянемо ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *де* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, $P(\{\omega_1\}) = 0.5, P(\{\omega_2\}) = 0.5$, $f_n(\omega_1) = 0$, $f_n(\omega_2) = 1, n \in \mathbb{N}_0$. Випадкові величини f_n є однаково розподіленими. Перевіримо, що на побудованому ймовірнісному просторі випадкові величини f_1 та f_2 залежні. Оскільки

$$\{\omega \in \Omega: f_1(\omega) = 0\} = \{\omega_1\},$$

то

$$P(\omega \in \Omega: f_1(\omega) = 0) = P(\{\omega_1\}) = 0.5.$$

Аналогічно, оскільки випадкові величини f_1 та f_2 однаково розподілені , то

$$P(\omega \in \Omega: f_2(\omega) = 0) = P(\{\omega_1\}) = 0.5.$$

Тому

$$P(f_1(\omega) = 0) \cdot P(f_2(\omega) = 0) = 0.25.$$

Оскільки

$$\{\omega \in \Omega: f_1(\omega) = 0, f_2(\omega) = 0\} = \{\omega_1\},$$

то

$$P(f_1(\omega) = 0) \cdot P(f_2(\omega) = 0) \neq P(f_1(\omega) = 0, f_2(\omega) = 0)$$

Тому $f_1, f_{2,\dots,} f_n$ – залежні випадкові величини.

Тепер нехай в рівнянні (3.1) $c = 5, b = 2, a = 2$.

$$5x_{n+2} + 2x_{n+1} + 2x_n = f_n(\omega). \tag{3.37}$$

Зауважимо, що оскільки $gcd(4,5) = 1$ то умова $gcd(a + b, c) = 1$ теореми 3.3 виконується. Також, оскільки значення 0 та 1 випадкових величин f_n лежать в різних класах лишків за модулем 5, то і умова (3.3) теореми 3.1 теж виконується.

При $\omega = \omega_1$ рівняння (3.37) має вигляд

$$5x_{n+2} + 2x_{n+1} + 2x_n = 0, \;\; n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.38}$$

Оскільки характеристичне рівняння $5\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ не має цілих коренів, с $\nmid b$, с $\nmid a$,то за теоремою 1.2 неявне лінійне різницеве рівняння (3.38) має єдиний тривіальний розв'язок $x_n = 0$. Таким чином, при $\omega = \omega_1$ рівняння (3.37) завжди має розв'язок.

При $\omega = \omega_2$ рівняння (3.37) приймає вигляд

$$5x_{n+2} + 2x_{n+1} + 2x_n = 1, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.39}$$

Оскільки характеристичне рівняння $5\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ не має цілих коренів, с $\nmid b$, с $\nmid a$ та $(a + b + c) \nmid 1$, то за наслідком 1.2 неявне рівняння (3.39) не має розв'язків в цілих числах. Таким чином, при $\omega = \omega_2$ рівняння (3.37) не має розв'язків в цілих числах, тому

$$A = \{\omega_1\} \text{ і } P(A) = P(\{\omega_1\}) = 0.5.$$

Покажемо що умова невиродженості розподілу випадкових величин f_n в Теоремі 3.2 є суттєвою для твердження навіть якщо $gcd(a + b, c) = 1$.

Приклад 3.4

Розглянемо випадок, коли випадкові величини f_n мають вироджений розподіл а $gcd(a + b, c) = 1$. Наприклад, нехай $a = b = -2$, $c = 3$ і $f_n(\omega) = -1\ \forall \omega \in \Omega$. Це означає, що випадкова величина f_n приймає лише одне значення -1 з ймовірністю 1. Рівняння (3.1) має наступний вигляд

$$3x_{n+2} - 2x_{n+1} - 2x_n = -1, \quad n \in \mathbb{N}_0,\ \omega \in \Omega. \tag{3.40}$$

Для будь-якого $\omega \in \Omega$ рівняння (3.40) має розв'язок

$$x_n = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Тому

$$P(A) =$$

$$= P\left(\omega \in \Omega\colon \exists \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0}\ \forall n \in \mathbb{N}_0 \ - 3x_{n+2} + 2x_{n+1} + 2x_n = f_n(\omega)\right) = 1$$

Варто зауважити, що $c \nmid a$, $c \nmid b$ і характеристичне рівняння

$$3\lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0,$$

що відповідає однорідному різницевому рівнянню

$$3x_{n+2} - 2x_{n+1} - 2x_n = 0 \ \ n \in \mathbb{N}_0 \tag{3.41}$$

не має цілих коренів. Отже, за теоремою 3.1 неявне однорідне рівняння (3.41) має тільки нульовий розв'язок у цілих числах.

Наведемо приклад рівняння (3.1), для якого виконана умова (3.3) теореми 3.1, та не виконана умова $gcd(a+b,c) = 1$ теореми 3.2.

Приклад 3.5

Нехай $a = 2,\ b = 4,\ c = 3$ та $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ – послідовність незалежних однаково розподілених величин, що мають наступну таблицю розподілу:

d_i	4	5
p_i	0.5	0.5

Маємо $gcd(6,3) = 3$, то умову $gcd(a+b,c) = 1$ теореми 3.2 не виконано. Рівняння (3.1) приймає наступний вигляд:

$$3x_{n+2} + 2x_{n+1} + 4x_n = f_n(\omega),\ \ n \in \mathbb{N}_0.$$

Оскільки $d_1 = 4$ та $d_2 = 5$ належать різним класам лишків за модулем c, то умова (3.3) теореми 3.1 виконана. А отже, за теоремою 3.1

$$P(A) =$$

$$= P\left(\omega \in \Omega\colon \exists \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0}\ \forall n \in \mathbb{N}_0\ \ 3x_{n+2} + 2x_{n+1} + 4x_n = f_n(\omega)\right) = \ 0.$$

Наведемо приклад рівняння (3.1), для якого не виконано умову (3.3) теореми 3.1, та виконана умова $gcd(a+b,c) = 1$ теореми 3.2.

Приклад 3.6

Нехай $a = 2, b = 5,\ c = 2$ та $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ – послідовність незалежних однаково розподілених величин, що мають наступну таблицю розподілу:

d_i	2	4
p_i	0.5	0.5

Оскільки $d_1 = 2$ та $d_2 = 4$ належать одному класу лишків за модулем c то умова (3.3) теореми 3.1 не виконана.

Рівняння (3.1) приймає наступний вигляд:

$$2x_{n+2} + 5x_{n+1} + 2x_n = f_n(\omega),\ \ n \in \mathbb{N}_0.$$

Оскільки $gcd(a+b,c) = gcd(2,7) = 1$, то умову теореми 3.2 виконано.

А отже, за теоремою 3.2

$$P(A) =$$

$$= P\left(\omega \in \Omega\colon\ \exists\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}_0}\ \forall n \in \mathbb{N}_0\ \ 3x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = f_n(\omega)\right) = \ 0.$$

Цікаво зауважити, що характеристичне рівняння

$$2\lambda^2 + 5\lambda + 2 = 0$$

має цілий корінь $\lambda = -2$. Тому відповідне однорідне різницеве рівняння

$$2x_{n+2} + 5x_{n+1} + 2x_n = 0,\ \ n \in \mathbb{N}_0$$

має нетривіальний розв'язок $x_n = (-2)^n,\ \ n \in \mathbb{N}_0$.

Висновки

В роботі досліджено деякі неявні лінійні неоднорідні різницеві рівняння над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$ з випадковою неоднорідністю. Нехай a, b, c – цілі числа, а $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ – послідовність незалежних, однаково розподілених цілозначних випадкових величин, які визначені на повному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Для кожного $\omega \in \Omega$ розглянуто неявне неповне лінійне різницеве рівняння $bx_{n+m} + ax_n = f_n(\omega), n \in \mathbb{N}_0$ порядку m. Доведено, що якщо a не ділиться на b, і випадкові величини $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ мають невироджений розподіл, то ймовірність існування розв'язку в цілих числах цього рівняння дорівнює нулю (теорема 2.1). Цей результат узагальнює результат роботи [6] для рівняння першого порядку. Також знайдено умови, за яких ймовірність того, що неявне лінійне різницеве рівняння другого порядку $cx_{n+2} + bx_{n+1} + ax_n = f_n(\omega), n \in \mathbb{N}_0$ має розв'язок в цілих числах, дорівнює нулю. Ці результати означають, при випадковому виборі цілих чисел f_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ відповідне неявне лінійне різницеве рівняння не має розв'язків в цілих числах. Крім того, в роботі наведено кілька прикладів, які показують хибність тверджень теорем при порушенні їх умов.

Список використаних джерел

1. S. Gefter, A. Goncharuk, A. Piven', Implicit Linear First Order Difference Equations Over Commutative Rings. In: Elaydi, S., Kulenovic, M.R.S., Kalabusic, S. (eds) Advances in Discrete Dynamical Systems, Difference Equations and Applications. ICDEA 2021. Springer Proceedings in Mathematics\& Statistics, vol 416, Springer, ham.–2023.–P. 199–216.

2. V.A. Gerasimov, S.L. Gefter and A.B. Goncharuk, Application of the p-adic topology on $\mathbb{Z}$ to the problem of finding solutions in integers of an implicit linear difference equation .– J. Math. Sci. 2018. – V.235. No. 3. – P. 256–261.

3. V. Martseniuk, S. Gefter, A. Piven', Integer solutions of implicit linear difference equations .– Voronoï's Impact on Modern Science. Proc. Sixth Int. Conf. Anal. Number Theory Spat. Tessellations. — Kyiv: Natl. Pedagog. Dragomanov Univ. Publ., 2018. — Vol. 1. — P. 87–95.

4. С.Л. Гефтер, В.В. Марценюк, О.Л. Півень, Цілочисельні розв'язки неявного лінійного різницевого рівняння другого порядку.–Буковинський математичний журнал. – 2018.– Т. 6 ,№3–4. – С. 40–46.

5. V.V. Martseniuk, S.L. Gefter, A.L. Piven', Uniqueness Criterion and Cramer's Rule for Implicit Higher Order Linear Difference Equations Over $\mathbb{Z}$. In: Baigent S., Bohner M., Elaydi S. (eds) Progress on Difference Equations and Discrete Dynamical Systems. ICDEA 2019. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol 341. Springer, Cham.–2020.– P. 311–325.

6. S.L. Gefter, A.L. Piven' , Implicit Linear Nonhomogeneous Difference Equation over Z with a Random Right-Hand Side, Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry.–2022.– Vol.18, No.1.–P. 105–117.

7. М.В. Карташов, Імовірність, процеси, статистика : Посібник. – К.: Видавничо-поліграфічний центр 'Київський університет', 2008.

8. H. Hasse, Number Theory, Springer-Verlag, Berlin, 1980.